ТАРАУ 1

СЫРТҚЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ РЕТІ ІШКІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ РЕТІНЕН КЕМ ЕМЕС ЖАҒДАЙЫНДАҒЫ СЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІ ШЕШУ

§1 Сызықты интегралды дифференциалдық теңдеуге қойылған Коши есебі

Келесі түрдегі сызықты интегралды дифференциалдық теңдеуге қойылған Коши есебін қарастырайық:

$$L[y(x)] = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha(x,t)\, y^{(\alpha)}(t)dt, \qquad m \le n \tag{1.1}$$

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad k = \overline{0, n-1}, \qquad x_0 \in [a,b], \tag{1.2}$$

мұндағы

$$L[y(x)] \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y^{(k)}(x)$$

сызықты дифференциалдық оператор.

Келесі шарттар орындалсын:

I. $a_i(x) \in C[a,b], \quad i = \overline{0, n-1}$.

II. $f(x)$ функциясы (a,b) интервалында үзіліссіз.

III. $H_\alpha(x,t)$ функциясы $\{a \le x, t \le b\}$ облысында регулярлы.

$K_i(x,s)$, $a \le s, x \le b$, $i = \overline{1,n}$ функциялары келесі есептің шешімі болсын:

$$\begin{cases} LK_i(x,s) = 0, \; i = \overline{1,n} \\ K_i^{(j)}(s,s) = \delta_{i-1,j}\,, \; j = \overline{0, n-1} \end{cases} \tag{1.3}$$

мұндағы $\delta_{i-1,j}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,n-1}$ – Кронекер символы.

Анықтама 1. (1.3) есебінің шешімі болатын $K_i(x,s)$, $i=\overline{1,n}$ функциялары *бастапқы функциялар* деп аталады.

Теорема 1. Егер I шарт орындалса, онда (1.3) есебінің шешімі болатын $K_i(x,s)$, $i=\overline{1,n}$ бастапқы функциялары $a \le s, x \le b$ облысында бар, жалғыз болады және келесі формуламен өрнектеледі:

$$K_i(x,s)=\frac{W_i(x,s)}{W(s)}\,, \qquad i=\overline{1,n}\,, \tag{1.4}$$

мұндағы $W(s)-$ іргелі шешімдер жүйесінен құралған вронскиан, $W_i(x,s)-$вронскиан $W(s)$- тің i – ші жатық жолын $y_i(x), i=\overline{1,n}$ іргелі шешімдер жүйесіне алмастырудан алынған анықтауыш.

Дәлелдеуі: $i=1$ жағдайын қарастырайық. $K_1(x,s)$ функциясын келесі түрде іздейміз:

$$K_1(x,s)=C_1y_1(x)+\ \dots +C_ny_n(x), \tag{1.5}$$

мұндағы $C_i,\ i=\overline{1,n}-$ әзірге белгісіз тұрақтылар. Бұл тұрақтыларды анықтау үшін (1.5) формуласын (1.3) есептің шартына қояйық:

$$\begin{cases} C_1y_1(s)+\ \dots +C_ny_n(s)=1 \\ C_1y_1'(s)+\ \dots +C_ny_n'(s)=0 \\ \dots \qquad \dots \quad \dots \\ C_1y_1^{(n-1)}(s)+\ \dots +C_ny_n^{(n-1)}(s)=0 \end{cases}$$

Бұл жүйенің бас анықтауышы $W(s)\ne 0$. Олай болса, бұл жүйе үйлесімді және

$$C_1=\frac{1}{W(s)}\begin{vmatrix} y_2'(s) & \dots & y_n'(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_2^{(n-1)}(s) & \dots & y_n^{(n-1)}(s)\end{vmatrix},$$

…

$$C_n=\frac{(-1)^{1+n}}{W(s)}\begin{vmatrix} y_1'(s) & \dots & y_{n-1}'(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(s) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(s)\end{vmatrix}.$$

Бұл алынған мәндерді (1.5) формуласына қойып, (1.4) формуланы аламыз.

$i = \overline{2, n}$ үшін тура осылай дәлелденеді.

А. Келесі түрдегі операторды

$$F[y(x)] = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha(x,t)\, y^{(\alpha)}(t)dt \tag{1.6}$$

енгізсек, онда (1.1) , (1.2) есебі пара-пар түрде келесі түрдегі сызықты интегралды дифференциалдық теңдеуге келеді:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, K_i(x, x_0) + \varphi(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} K_n(x, \eta)\, F[y(\eta)]d\eta, \tag{1.7}$$

мұндағы $K_i(x, s), i = \overline{1, n} -$ бастапқы функциялар және

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} K_n(x, \eta)\, f(\eta)d\eta\, .$$

$$L[\varphi(x)] = f(x)\, . \tag{1.8}$$

Лемма 1. (1.7) сызықты интегралды дифференциалдық теңдеудің әрбір шешімі (1.1) сызықты интегралды дифференциалдық теңдеудің шешімі болады.

Дәлелдеу. $y_{\mathbf{0}}(x)$ - (1.7) теңдеудің шешімі болсын. Онда

$$y_0(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} C_i\, K_i(x, x_0) + \varphi(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} K_n(x, \eta)\, F[y_0(\eta)]d\eta\, .$$

Осы теңдікке L операторын қолданып, $L[y_0(x)] \equiv L[\varphi(x)] + \lambda F[y_0(x)]$ теңдігін аламыз.

(1.6) және (1.8) теңдіктері арқылы

$$L[y_0(x)] \equiv f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha(x,t)\, y_0^{(\alpha)}(t)dt$$

теңдеуіне келеміз, яғни $y_0(x)$ шешімі (1.1) теңдеуді қанағаттандырады.

Лемма дәлелденді.

Салдар. Егер $F[y_0(x)]$ функциясы бірмәнді болса, онда $K_n(x,\eta)$ бастапқы функциясы жалғыз болғандықтан, (1.1), (1.2) Коши есебінің шешімі жалғыз және (1.7) формуламен анықталады.

(1.7) сызықты интегралды дифференциалдық теңдеудің шешімін нақты түрде табу үшін (1.7) теңдеуді интегралдық теңдеуге келтіреміз. Ол үшін теңдеудің екі жағына да F операторын қолданамыз:

$$F[y(x)] = \sum_{i=1}^{n} C_i\, F[K_i(x,x_0)] + F[\varphi(x)] +$$

$$+\lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha\,(x,t) \left(\int_{x_0}^{t} K_n^{(\alpha)}(t,\eta)\, F[y(\eta)]d\eta \right) dt\,.$$

Теңдіктің интегралдық мүшесін екі қосынды түрінде жазамыз:

$$\lambda \int_a^{x_0} \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha\,(x,t) \int_{x_0}^{t} K_n^{(\alpha)}\,(t,\eta)\, F[y(\eta)]d\eta\; dt +$$

$$+\,\lambda \int_{x_0}^{b} \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha\,(x,t) \int_{x_0}^{t} K_n^{(\alpha)}\,(t,\eta)\, F[y(\eta)]d\eta\; dt\,.$$

Бұл интегралдардың ретін алмастырып Фредгольмнің 2-ші типті интегралдық теңдеуіне келеміз:

$$u(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b N(x,t)\, u(t)dt, \qquad (1.9)$$

мұндағы

$$u(x) = F[y(x)], \quad \psi(x) = F[\varphi(x)] + \sum_{i=1}^{n} C_i\, F[K_i(x,x_0)], \qquad (1.10)$$

$$N(x,t)=\begin{cases}\int_t^a \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha(x,\eta)\ K_n^{(\alpha)}(\eta,t)d\eta, & t\ \le x_0\\ \int_t^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha(x,\eta)\,K_n^{(\alpha)}(\eta,t)d\eta, & t\ge x_0\end{cases}$$

$K_n^{(k)}(\eta,t)$ функциясы – $K_n(\eta,t)$ функциясынан η айнымалы бойынша κ ретті туындысы.

Дербес жағдайда, егер $x_0=a$ болса, онда

$$N(x,t)=\int_t^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha(x,\eta)\,K_n^{(\alpha)}(\eta,t)d\eta.$$

Қорытындыласақ, егер $y(x)-$ (1.7) теңдеудің шешімі болса, онда $F[y(x)]-$ (1.9) интегралдық теңдеудің шешімі болады. Керісінше, егер λ-ның кейбір мәндерінде (1.9) интегралдық теңдеудің шешімі $u_0(x)$ болса, онда дәл осы λ- ның мәндерінде (1.7) теңдеудің шешімі

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i K_i(x,x_0)+\varphi(x)+\lambda\int_{x_0}^{x} K_n(x,\eta)\,u_0(\eta)d\eta \qquad (1.11)$$

түрінде болады. Шындығында да, бұл тұжырымның дұрыстығы келесі тепе – теңдіктен шығады:

$$F[y(x)]\equiv\psi(x)+\lambda\int_a^b N(x,t)\,u_0(\eta)d\eta\equiv u_0\,(x).$$

(1.11) теңдікті (1.2) бастапқы шарттарға қойып, $K_i(x,s)$ бастапқы функциялардың шарттарын ескеріп, $C_i=y_0^{(i-1)},\quad i=\overline{1,n}$ мәндерін табамыз. Сонда (1.11) формуланы келесі түрде жазамыз:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} K_i(x,x_0)+\varphi(x)+\lambda\int_{x_0}^{x} K_n(x,\eta)\,u_0(\eta)d\eta \qquad (1.12)$$

Алынған нәтижелерді және *Лемма 1* ескере отырып, келесі теореманы келтіреміз.

Теорема 2. λ-ның кейбір мәндерінде (1.1), (1.2) Коши есебінің шешілуі үшін (1.9) интегралдық теңдеуі $\lambda -$ның дәл осы мәндерінде шешілуі қажетті және жеткілікті.

Теорема 3. Егер λ мәні (1.9) интегралдық теңдеудің меншікті мәні болмаса, онда (1.1), (1.2) Коши есебінің шешімі жалғыз болады және (1.12) формуламен анықталады.

B. Біртекті сызықты интегралды дифференциалдық теңдеуге қойылған бастапқы шарттары нольге тең болатын Коши есебін қарастырайық:

$$L[y(x)] = \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha(x,t)\, y^{(\alpha)}(t)dt \qquad (1.13)$$

$$y^{(k)}(x_0) = 0,\ k = \overline{0, n-1}. \qquad (1.14)$$

λ' - (1.9) интегралдық теңдеудің $N(x,t)$ өзегінің меншікті мәні, q – осы мәннің рангі, $\{\, u_k(x),\ k = \overline{1,q}\,\}$ - сәйкесінше меншікті функциялар жүйесі болсын.

Теорема 4.

$$v_k(x) = \lambda' \int_{x_0}^{x} K_n(x,\eta)\, u_k\,(\eta)d\eta\,, \quad k = \overline{1,q} \qquad (1.15)$$

функциялар жүйесі келесі қасиеттерге ие:

1. $v_k(x) \neq 0\,, \quad k = \overline{1,q}$

2. (a,b) аралығында сызықты тәуелсіз;

3. $\lambda = \lambda'$ мәні үшін (1.13), (1.14) Коши есебінің шешімі болады.

Дәлелдеу. (1.15) формулаға F операторын қолданайық:

$$F[v_k(x)] = \lambda' \int_a^b N(x,t)\, u_k(t)dt \equiv u_k\,(x). \qquad (1.16)$$

Бұдан егер $v_k(x) \equiv 0$ болса, онда $u_k(x) \equiv 0$. Ал бұл мүмкін емес, себебі $u_k(x) \not\equiv 0$ меншікті функциялар жүйесі.

(1.15) функциялар жүйесінің сызықты тәуелсіздігі (1.16) теңдігінен айқын.

(1.15) формулаға L операторын қолдансақ, $L[v_k(x)] = \lambda' u_k(x)$ теңдігіне келеміз. Онда бұл теңдіктің және (1.16)-тің көмегімен $v_k(x)$ функцияларының (1.13), (1.14) есебінің шешімі екенін көруге болады.

Теорема 4 дәлелденді.

$\{\psi_k(x)\}$ - (1.9)-ға сәйкес біртекті интегралдық теңдеуге түйіндес интегралдық теңдеудің меншікті функциялар жүйесі болсын, $k = \overline{1,q}$.

$\lambda = \lambda'$ меншікті мәні үшін (1.9) интегралдық теңдеудің шешімі бар болуының шарты орындалсын, яғни $\big(\psi(x), \psi_k(x)\big) = 0, k = \overline{1,q}$ немесе

(1.10) формуланың екінші теңдігін және $C_i = y_0^{(i-1)}$, $i = \overline{1,n}$ ескерсек бұл шартты келесі түрде жазамыз:

$$a_{k1}y_0^{(0)} + a_{k2}y_0^{(1)} + \ldots + a_{kn}y_0^{(n-1)} = b_{k,} \qquad k = \overline{1,q} \tag{1.17}$$

мұндағы

$$a_{ki} = \int_a^b \psi_k(x)\, F[K_i(x, x_0)]\, dx, \ \ i = \overline{1,n}$$

және

$$b_k = -\int_a^b \psi_k(x)\, F[\varphi(x)] dx.$$

Егер (1.9) интегралдық теңдеудің $\lambda = \lambda'$ мәні үшін дербес шешімі $u^{(0)}(x)$ болса, онда (1.1), (1.2) есебінің шешімі

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} K_i(x, x_0) + \varphi(x) +$$

$$+\lambda' \int_{x_0}^{x} K_n(x, \eta)\, u^{(0)}(\eta) + \sum_{k=1}^{q} A_k v_k(x) \tag{1.18}$$

түрінде анықталады, мұндағы $A_k -$ кез келген тұрақтылар және $v_k(x)$ функциялар жүйесі (1.15) формуламен беріледі.

Енді (1.1) теңдеудің шешімі (1.18) формуласымен анықталатынын көрсетейік. Ол үшін (1.18) формуласына L және F операторларын қолданып,

$$L[\bar{y}(x)] \equiv f(x) + \lambda' \, u^{(0)}(x) + \lambda' \sum_{k=1}^{q} A_k \, u_k(x),$$

$$F[\bar{y}(x)] \equiv \psi(x) + \lambda' \int_a^b N(x,t) \, u^{(0)}(t) dt + \sum_{k=1}^{q} A_k u_k \,(x) \equiv$$

$$\equiv u^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{q} A_k \, u_k(x)$$

теңдіктеріне келеміз. Бұдан (1.1) және (1.6) теңдіктері арқылы

$$L[\bar{y}(x)] \equiv f(x) + \lambda' \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha(x,t) \, \bar{y}^{(\alpha)}(t) dt$$

теңдігін аламыз. Осылайша, келесі *теорема 5* дұрыс болады:

Теорема 5. Егер $\lambda = \lambda'$ болса, (1.17) теңдіктер орындалған жағдайда (1.1), (1.2) Коши есебінің шешімі бар болады және (1.18) формуласымен анықталады және де бұл шешім кез-келген q параметрлерінен тәуелді болады.

Мысал 1.

$$y'' + y' = 1 + \int_0^1 \beta \, y'(t) dt \,, \qquad \beta \neq e$$

$$y(0) = 1 \,, \quad y'(0) = 1$$

Шешуі:

$$z = \int_0^1 \beta\, y'(t)dt \qquad (a)$$

белгілеуін енгізсек, онда келесі түрдегі дифференциалдық есепті аламыз:

$$y'' + y' = 1 + z \qquad (b)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

(b) есебінің шешімі

$$y(x) = 1 - z + z\, e^{-x} + (1 + z)\, x \qquad (c)$$

түрінде беріледі. Бұл шешімдегі z тұрақтысын (a) белгілеуінен анықтаймыз:

$$z = \frac{\beta}{1 - \beta e^{-1}}.$$

Табылған z тұрақтысын (c) теңдігіне қойып, берілген интегралды дифференциалдық есептің шешімін аламыз:

$$y(x) = \frac{1 - \beta(1 + e^{-1})}{1 - \beta e^{-1}} + \frac{\beta}{1 - \beta e^{-1}}\, e^{-x} + \frac{1 + \beta(1 - e^{-1})}{1 - \beta e^{-1}}\, x.$$

§2 Сызықты интегралды дифференциалдық теңдеуге қойылған шекаралық есеп

(1.1) түріндегі сызықты интегралды дифференциалдық теңдеуге қойылған шекаралық есепті қарастырайық:

$$L[y(x)] = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha(x,t)\, y^{(\alpha)}(t)dt, \qquad m \le n \qquad (1.19)$$

$$
\begin{cases} h_l y \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{lj} y^{(j)}(a) = a_l, \qquad l = \overline{1,p} \\ h_{p+l} y \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{lj}\, y^{(j)}(b) = b_l, \qquad l = \overline{1,q} \end{cases} \tag{1.20}
$$

$$
p + q = n,
$$

мұндағы

$$
L[y(x)] \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y^{(k)}\,(x)
$$

сызықты дифференциалдық оператор.

§1 – дегі I-III шарттар орындалсын.

$\Phi_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ функциялары келесі есептің шешімі болсын:

$$
\begin{cases} L\Phi_i(x) = 0\,, \;\; i = \overline{1,n} \\ h_k \Phi_i(x) = \delta_{ki}\,, \quad k = \overline{1,n}\,, \end{cases} \tag{1.21}
$$

мұндағы δ_{ki}, $k = \overline{1,n},$, $i = \overline{1,n}$ – Кронекер символы.

Анықтама 2. (1.21) есебінің щешімі болатын $\Phi_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ функциялары *шекаралық функциялар* деп аталады.

Теорема 6. Егер I шарт орындалса және $\Delta \neq 0$ болса, онда (1.21) есебінің шешімі болатын $\Phi_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ функциялары $[a,b]$ кесіндісінде бар, жалғыз болады және келесі формуламен өрнектеледі:

$$
\Phi_i(x) = \frac{\Delta_i(x)}{\Delta}\,, \quad i = \overline{1,n}\,, \tag{1.22}
$$

мұндағы $\Delta = \begin{vmatrix} h_1 y_1(x) & h_1 y_2(x) & \dots & h_1 y_n(x) \\ \dots & \dots & & \dots \\ h_n y_1(x) & h_n y_2(x) & \dots & h_n y_n(x) \end{vmatrix}$, ал $\Delta_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ – Δ

анықтауышынан оның i-ші жатық жолын $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ іргелі шешімдер жүйесіне алмастырудан шығатын анықтауыш.

Бұл теореманың дәлелдеуі *теорема 1-ге* ұқсас дәлелденеді.

§1-дегі тәсілдің көмегімен (1.19), (1.20) шекаралық есебі пара-пар түрде келесі түрдегі сызықты интегралды дифференциалдық теңдеуге келеді:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \, \Phi_i(x) + \varphi(x) + \lambda \int_a^x K_n(x,\eta)\, F[y(\eta)]d\eta, \qquad (1.23)$$

мұндағы $K_n(x,\eta)$ - белгілі Коши функциясы, $\Phi_i(x)$, $i = \overline{1,n} -$ шекаралық функциялар, ал

$$\varphi(x) = \int_a^x K_n(x,\eta)\, f(\eta)d\eta\, .$$

(1.23) сызықты интегралды дифференциалдық теңдеудің әрбір шешімі (1.19) сызықты интегралды дифференциалдық теңдеудің шешімі болады.

(1.23) сызықты интегралды дифференциалдық теңдеудің шешімін нақты түрде табу үшін (1.23) теңдеуді §1-дегі жолмен келесі интегралдық теңдеуге келтіреміз.

$$u(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b N(x,t)\, u(t)dt\ , \qquad (1.24)$$

мұндағы

$$u(x) = F[y(x)], \quad \psi(x) = F[\varphi(x)] + \sum_{i=1}^{n} C_i\, F[\Phi_i(x)], \qquad (1.25)$$

$$N(x,t) = \int_t^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha\,(x,\eta)\, {K_n}^{(\alpha)}(\eta,t)d\eta\, .$$

λ мәні $N(x,t)$ өзегінің меншікті мәні болмаса, онда (1.24) интегралдық теңдеудің шешімі

$$u(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\, \psi(t)dt \qquad (1.26)$$

түрінде анықталады, мұндағы $R(x,t,\lambda)-N(x,t)$ өзегінің резольвентасы. Бұл анықталған шешімді (1.23) теңдікке қойып, (1.25) формуланы ескеріп,

C_i, $i=\overline{1,n}$ тұрақтыларын жинақтап, шешімді

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i\widetilde{\Phi}_i(x)+\tilde{\varphi}(x) \tag{1.27}$$

түрінде аламыз, мұндағы

$$\widetilde{\Phi}_i(x)=\Phi_i(x)+\lambda\int_a^x K_n(x,\eta)\,\overline{\Phi}_i(\eta)d\eta,\quad i=\overline{1,n}, \tag{1.28}$$

$$\tilde{\varphi}(x)=\varphi(x)+\lambda\int_a^x K_n(x,\eta)\,\bar{\varphi}(\eta)d\eta, \tag{1.29}$$

$$\overline{\Phi}_i(\eta)=F[\Phi_i(\eta)]+\lambda\int_a^b R(\eta,t,\lambda)\,F[\Phi_i(t)]dt,\quad i=\overline{1,n},$$

$$\bar{\varphi}(\eta)=F[\varphi(\eta)]+\lambda\int_a^b R(\eta,t,\lambda)\,F[\varphi(t)]dt\,.$$

Бұл алынған (1.27) шешімге (1.20) шекаралық шарттарды қолданып,

$C_l=a_l,\quad l=\overline{1,p}$ мәндерін аламыз. Ал C_{p+l}, $l=\overline{1,q}$ белгісіздері үшін келесі теңдеулер жүйесі алынады:

$$\sum_{i=p+1}^{n} C_i\left(\delta_{p+k,i}+\sum_{j=0}^{n-1}\beta_{p+k,j}\,\lambda\int_a^b K_n^{(j)}(b,\eta)\,\overline{\Phi}_i(\eta)d\eta\right)=b_k-$$

$$-\sum_{i=1}^{p} a_i\sum_{j=0}^{n-1}\beta_{p+k,j}\lambda\int_a^b K_n^{(j)}(b,\eta)\overline{\Phi}_i(\eta)d\eta\,,\quad k=\overline{1,q} \tag{1.30}$$

ω − (1.30) жүйенің бас анықтауышы болсын.

Теорема 7. Егер λ параметрі (1.24) интегралдық теңдеудің меншікті мәні болмаса және $\omega \neq 0$ болса, онда (1.19), (1.20) шекаралық есебінің шешімі $[a, b]$ кесіндісінде бар, жалғыз болады және

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_i \widetilde{\Phi}_i(x) + \tilde{\varphi}(x), \tag{1.31}$$

формуласымен анықталады, мұндағы $\widetilde{C}_i = a_i,\ i = \overline{1, p}$, $\tilde{C}_i,\ i = \overline{p+1, n}$ – тұрақтылары (1.30) жүйенің шешімі, ал $\widetilde{\Phi}_i(x), \widetilde{\varphi}(x)$ функциялары (1.28), (1.29) формулалармен анықталады.

Мысал 2.

$$y'' + y' = 1 + \int_0^1 \beta\, y'(t) dt\,,$$

$$y(0) = \alpha\,, \quad y(1) = \gamma$$

Шешуі:

$$z = \int_0^1 \beta\, y'(t) dt$$

деп белгілеп, берілген теңдеуді дифференциалдық теңдеу ретінде қарастырып, жалпы шешімін табамыз:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + (1 + z)\, x$$

Бұл алынған шешімге шекаралық шарттарды қолданып,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \alpha \\ C_1 + C_2 e^{-1} = \gamma - (1 + z). \end{cases}$$

жүйесін аламыз. Бұл жүйені шешіп

$$C_1 = \frac{\alpha e^{-1} - \gamma + (1 + z)}{e^{-1} - 1}\,,$$

$$C_2 = \frac{\gamma - \alpha - (1 + z)}{e^{-1} - 1}$$

белгісіздерін табамыз. Табылған C_1 және C_2 тұрақтыларын жалпы шешімге қоямыз:

$$y(x) = \frac{\alpha e^{-1} - \gamma + (1+z)}{e^{-1} - 1} + \frac{\gamma - \alpha - (1+z)}{e^{-1} - 1} e^{-x} + (1+z)\, x \,.$$

Алынған $y(x) -$ ты $z -$ке қойып, $z = \beta(\gamma - \alpha)$ екенін анықтаймыз.

Сөйтіп, берілген шекаралық есептің шешімін табамыз:

$$y(x) = \frac{\alpha(e^{-1} - \beta) + \gamma(\beta - 1) + 1}{e^{-1} - 1} + \frac{(\gamma - \alpha)(1 - \beta) - 1}{e^{-1} - 1} e^{-x} +$$

$$+\big(1 + \beta(\gamma - \alpha)\big)\, x.$$

ТАРАУ 2

СЫРТҚЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ РЕТІ ІШКІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ РЕТІНЕН КІШІ БОЛҒАН ЖАҒДАЙДАҒЫ СЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІ ШЕШУ

§1 Сызықты интегралды дифференциалдық теңдеуге қойылған Коши есебі

Келесі түрдегі сызықты интегралды дифференциалдық теңдеуге қойылған Коши есебін қарастырайық:

$$L[y(x)] = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha(x,t)\, y^{(\alpha)}(t)dt, \quad m > n \tag{2.1}$$

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad k = \overline{0, n-1}\,, \qquad x_0 \in [a,b]\,, \tag{2.2}$$

мұндағы

$$L[y(x)] \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y^{(k)}(x)$$

сызықты дифференциалдық оператор.

Келесі шарттар орындалсын:

I. $a_i(x) \in C[a,b], \quad i = \overline{0, n-1}.$

II. $f(x)$ функциясы және оның p ретті туындылары (a,b) аралығында үзіліссіз.

III. $H_\alpha(x,t)$ функциялары x айнымалысы бойынша p ретті туындысымен қоса $\{\, a \le x, t \le b \,\}$ облысында регулярлы.

(2.1) теңдеуді x айнымалысы бойынша p рет дифференциалдап, сосын кері қарай p рет $[x_0, x]$ аралығында интегралдап, келесі түрдегі көмекші теңдеуге келеміз:

$$L[y(x)] = f(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k \frac{(x-x_0)^k}{k!} + \lambda \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} \; \mathrm{Q}[y(\eta)]d\eta, \qquad (2.3)$$

мұндағы $A_k -$ кез келген тұрақтылар, ал Q операторы интегралды дифференциалдық оператор

$$\mathrm{Q}[y(x)] = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha^{(p)}(x,t)\, y^{(\alpha)}(t)dt\,.$$

$H_\alpha^{(p)}(x,t)$ символы $- H_\alpha(x,t)$ функциясының x айнымалысы бойынша алынған p ретті туындысы.

Егер A_k тұрақтылары

$$A_k = \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha^{(k)}(x_0,t)\, y^{(\alpha)}(t)dt, \qquad k = \overline{0, p-1} \qquad (2.4)$$

шартына бағынса, онда (2.1) және (2.3) теңдеулері пара-пар болады. Сондықтан да (2.3) теңдеуді (2.2) бастапқы шарттармен қарастырамыз.

I тараудың §1-дегі тәсілі бойынша (2.3) теңдеуді келесі түрге келтіреміз:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, K_i(x,x_0) + \varphi(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k \varphi_k(x) +$$

$$+\lambda \int_{x_0}^{x} \overline{K}_n(x,\eta)\; Q[y(\eta)]d\eta, \qquad (2.5)$$

мұндағы

$$\begin{cases} \varphi(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K_n(x,\eta)\, f(\eta) d\eta\,, \\ \varphi_k(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K_n(x,\eta)\, \dfrac{(\eta - x_0)^k}{k!} d\eta, \\ \overline{K}_n(x,\eta) = \int\limits_{\eta}^{x} K_n(x,t)\, \dfrac{(t-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} dt, \end{cases} \tag{2.6}$$

ал $K_i(x,s),\ i = \overline{1,n}$ −бастапқы функциялар.

$\overline{K}_n(x,\eta)$ функциясы

$$L[y(x)] = \frac{(x-\eta)^{p-1}}{(p-1)!}$$

түріндегі дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады және

$$\overline{K}_n{}^{(j)}(\eta,\eta) = \begin{cases} 0, & j = \overline{0, m-2} \\ 1, & j = m-1 \end{cases}.$$

(2.5) теңдікті (2.2) бастапқы шарттарға қойып, $K_i(x,s)$ бастапқы функциялардың шарттарын ескеріп, $C_i = y_0^{(i-1)},\ \ i = \overline{1,n}$ мәндерін табамыз. Сонда (2.5) формуланы келесі түрде жазамыз:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)}\, K_i(x,x_0) + \varphi(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k \varphi_k(x) +$$

$$+\lambda \int\limits_{x_0}^{x} \overline{K}_n\,(x,\eta)\, Q[y(\eta)] d\eta, \tag{2.7}$$

(2.7) сызықты интегралды дифференциалдық теңдеуге Q операторымен әсер етіп,

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)}\, \widetilde{K}_i(x,x_0) + \omega(x) +$$

$$+\sum_{k=0}^{p-1} A_k \omega_k(x) + \lambda \int_a^b M(x,t)\, u(t)dt \qquad (2.8)$$

интегралдық теңдеуге келтіреміз, мұндағы

$$M(x,t) = \begin{cases} \int_t^a \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha^{(p)}(x\,,\tau)\, \overline{K}_n^{(\alpha)}(\tau,t)d\tau + H_m(x,t), & t \le x_0 \\ \int_t^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha^{(p)}\,(x,\tau)\, \overline{K}_n^{(\alpha)}(\tau,t)d\tau + H_m(x,t), & t \ge x_0 \end{cases} \qquad (2.9)$$

ал $u(x)$, $\omega(x)$, $\omega_k(x)$, $\widetilde{K}_i(x,x_0)$ функциялары келесі түрде өрнектеледі:

$$u(x) = \mathrm{Q}[y(x)],\ \omega(x) = \mathrm{Q}[\varphi(x)],$$

$$\omega_k(x) = \mathrm{Q}[\varphi_k(x)],\ \widetilde{K}_i(x,x_0) = Q[K_i(x,x_0)].$$

А. λ параметрі $M(x,t)$ өзегінің меншікті мәні болмасын.

$$Av(x) \equiv v(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\, v(t)dt \qquad (2.10)$$

операторын енгізейік, мұндағы $R(x,t,\lambda) - M(x,t)$ өзегінің резольвентасы. Онда (2.8) интегралдық теңдеудің шешімі

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)}\, A\, \widetilde{K}_i(x,x_0) + A\omega(x) +$$

$$+\sum_{k=0}^{p-1} A_k A\omega_k(x) \qquad (2.11)$$

түрінде анықталады. Осы шешімге сәйкес (2.7) сызықты интегралды дифференциалдық теңдеудің шешімі

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)}\, \overline{K}_i(x,x_0) + \varphi(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} \overline{K}_n\,(x,\eta) A\omega(\eta)d\eta +$$

$$+\sum_{k=0}^{p-1} A_k \left(\varphi_k(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} \overline{K}_n\,(x,\eta) A\omega_k(\eta) d\eta \right), \quad (2.12)$$

түрінде болады, мұндағы

$$\overline{K}_i(x,x_0) = K_i(x,x_0) + \lambda \int_{x_0}^{x} \overline{K}_n\,(x,\eta)\, A\widetilde{K}_i(\eta,x_0) d\eta\,.$$

Сонда (2.12) формуланы келесі түрде жазамыз:

$$y(x) = \eta(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k \eta_k(x), \qquad (2.13)$$

мұндағы

$$\begin{cases} \eta(x) = \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)}\, \overline{K}_i(x,x_0) + \varphi(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} \overline{K}_n\,(x,\eta)\, A\omega(\eta) d\eta \\ \eta_k(x) = \varphi_k(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} \overline{K}_n\,(x,\eta)\, A\omega_k(\eta) d\eta. \end{cases} \qquad (2.14)$$

Егер (2.14) формуладағы $\eta(x)$, $\eta_k(x)$ функцияларына Q операторын қолдансақ, келесі теңдіктерді аламыз:

$$\begin{cases} A\omega(x) \equiv Q[\eta(x)] \\ A\omega_k(x) \equiv \mathrm{Q}[\eta_k(x)], \end{cases} \qquad (2.15)$$

мұндағы А операторы (2.10) формуласымен анықталады.

(2.14) және (2.15) формулаларды ескере отырып, (2.13) функциясы (2.7) теңдеуді қанағаттандыратынын тексеруге болады. Бұл функция (2.1) теңдеудің шешімі болуы үшін A_k тұрақтылары (2.4) шартына бағыну керек. (2.4) шартқа $y(x)$ мәнін қойсақ, онда A_k тұрақтыларын анықтайтын жүйе аламыз:

$$A_k - \lambda \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{ki} A_i = \lambda a_k(\lambda), \quad k = \overline{0, p-1}, \qquad (2.16)$$

мұндағы

$$a_k(\lambda) = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha^{(k)}(x_0, t)\, \eta^{(\alpha)}(t) dt$$

$$\alpha_{ki}(\lambda) = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha^{(k)}(x_0, t)\, \eta_i^{(\alpha)}(t) dt\,.$$

$\Delta(\lambda)$ –(2.16) жүйенің бас анықтауышы болсын. Егер $\Delta(\lambda) \neq 0$ болса,онда A_k шамалары бірмәнді анықталады. Сондықтан да (2.1) теңдеудің шешімі жалғыз және (2.13) формуламен анықталады.

$\Delta(\lambda) = 0$ болсын. Онда

$$L[y(x)] = \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha(x, t)\, y^{(\alpha)}(t) dt \qquad (2.17)$$

$$y^{(k)}(x_0) = 0,\ k = \overline{0, n-1}. \qquad (2.18)$$

есебіне сәйкес (2.7) және (2.8) теңдеулері $C_i = y_0^{(i-1)} = 0,\ i = \overline{1, n}$ екені ескеріліп, келесі түрде болады:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{p-1} A_k\, \varphi_k(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} \overline{K}_n(x, \eta)\ \mathrm{Q}[y(\eta)] d\eta, \qquad (2.19)$$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{p-1} A_k \omega_k(x) + \lambda \int_a^b M(x, t)\, u(t) dt\,. \qquad (2.20)$$

Бұл теңдеулердің шешімі

$$y(x) = \sum_{k=0}^{p-1} A_k\, \eta_k(x), \qquad (2.21)$$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{p-1} A_k\, A\omega_k(x), \qquad (2.22)$$

түрінде анықталады, ал (2.16) жүйесі біртекті болады:

$$A_k - \lambda \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{ki} A_i = 0, \quad k = \overline{0, p-1} \, . \tag{2.23}$$

Егер (2.23) жүйенің матрицасының рангі ρ болса, онда жүйенің $p - \rho$ сызықты тәуелсіз шешімі

$\alpha_0^{(s)}, \alpha_1^{(s)}, \ \ldots \quad , \alpha_{p-1}^{(s)} \qquad s = \overline{0, p-(\rho+1)}$ болады. Алынған A_k мәндерін (2.21) формулаға қойып,

$$y_s(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k^{(s)} \eta_k(x), \quad s = \overline{0, p-(\rho+1)} \tag{2.21'}$$

(2.17) интегралды дифференциалдық теңдеудің $p - \rho$ сызықты тәуелсіз шешімін аламыз.

$\Delta(\lambda) = 0$ теңдеуінің түбірі болатын $\lambda = \lambda''$ мәнін (2.17) біртекті интегралды дифференциалдық теңдеуінің $m > n$ жағдайындағы меншікті мәні, ал бұл λ'' мәніне сәйкес $y_s(x)$ функцияларын *меншікті функциялары* деп атауға болады.

Егер біртекті емес (2.16) жүйенің $\lambda = \lambda''$ мәні үшін шешімі бар болса, онда (2.1) біртекті емес интегралды дифференциалдық теңдеудің де шешімі бар болады және ол шешім

$$y(x) = y^{(0)}(x) + \sum_{s=0}^{p-(\rho+1)} B_s \, y_s(x) \tag{2.21''}$$

түрінде анықталады, мұндағы $y^{(0)}(x) -$ (2.1) теңдеудің қандай да бір дербес шешімі, ал $y_s(x)$ функциясы $(2.21')$ формуласымен анықталады.

$m > n$, $\Delta(\lambda) -$ (2.16) жүйенің бас анықтауышы, $\rho -$ осы жүйенің матрицасының рангі болсын.

Теорема 8. Егер λ мәні $\Delta(\lambda) = 0$ теңдеуінің түбірі болмаса, онда (2.1) теңдеудің шешімі жалғыз және (2.13) формуламен анықталады, мұндағы A_k тұрақтылары (2.16) жүйеден бірмәнді табылады.

Теорема 9. Біртекті (2.17) теңдеуінің нөлдік емес шешімі бар болуы үшін λ параметрі $\Delta(\lambda) = 0$ теңдеуінің түбірі болуы қажетті және жеткілікті. Бұл жағдайда (2.17) теңдеудің $(2.21')$ түріндегі $p - \rho$ сызықты тәуелсіз шешімдері болады.

Теорема 10. λ'' мәні $\Delta(\lambda) = 0$ теңдеуінің түбірі болсын. $\lambda = \lambda''$ мәні үшін (2.1) теңдеу шешілуі үшін (2.16) жүйенің осы λ мәндерінде шешілуі қажетті және жеткілікті. Бұл жағдайда (2.1) теңдеудің жалпы шешімі (2.21″) формуласымен анықталады.

B. λ параметрі M өзегінің меншікті мәні болсын.

$$u(x) = \lambda \int_a^b M(x,t)\, u(t)\, dt \tag{2.24}$$

$\lambda = \lambda_1$ – M өзегінің меншікті мәні, $\nu -$ осы мәннің рангі; $\{u_k(x),\ k = \overline{1,\nu}\}$ және $\{\psi_k(x),\ k = \overline{1,\nu}\} -$ сәйкесінше (2.24) интегралдық теңдеудің және (2.24) интегралдық теңдеуге түйіндес интегралдық теңдеудің λ_1 меншікті мәніне сәйкес меншікті функциялар жүйесі болсын.

$$B\upsilon(x) \equiv \upsilon(x) + \lambda_1 \int_a^b K\,(x,t)\,\upsilon(t)dt$$

операторын енгізейік, мұндағы $K(x,t) -$ $M(x,t)$ өзегінің жалпыланған резольвентасы. Онда (2.8) интегралдық теңдеудің шешімі

$$u(x) = B\omega(x) + \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} B\widetilde{K}_i(x,x_0) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k\, B\omega_k(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\nu} B_k u_k\,(x) \tag{2.25}$$

түрінде анықталады, мұндағы $B_k -$ кез келген тұрақтылар. Бұл шешімге сәйкес (2.1) теңдеуінің щешімі келесі түрде болады:

$$y(x) = h(x) + \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} g_i(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k h_k(x) + \sum_{k=1}^{\nu} B_k \upsilon_k\,(x), \tag{2.26}$$

мұндағы

$$\upsilon_k(x) = \lambda_1 \int\limits_{x_0}^{x} \overline{K}_n\,(x,\eta)\, u_k(\eta)d\eta, \tag{2.27}$$

$$\begin{cases} h(x) = \varphi(x) + \lambda_1 \int\limits_{x_0}^{x} \overline{K}_n\,(x,\eta)\, B\omega(\eta)d\eta, \\ h_k(x) = \varphi_k(x) + \lambda_1 \int\limits_{x_0}^{x} \overline{K}_n\,(x,\eta)\, B\omega_k(\eta)d\eta, \\ g_i(x) = K_i(x,x_0) + \lambda_1 \int\limits_{x_0}^{x} \overline{K}_n(x,\eta)\, B\widetilde{K}_i\,(\eta,x_0)d\eta. \end{cases} \tag{2.28}$$

(2.27) және (2.28) формулалардың келесі түрдегідей кері формулалары бар:

$$\begin{cases} B\omega(x) \equiv \mathrm{Q}[h(x)] \\ B\omega_k(x) \equiv \mathrm{Q}[h_k(x)] \\ B\widetilde{K}_i(x,x_0) \equiv Q[g_i(x)] \\ u_k(x) \equiv \mathrm{Q}[\upsilon_k(x)] \end{cases} \tag{2.29}$$

A_k параметрлерін (2.4) шартына бағындырсақ, онда келесі жүйені аламыз:

$$A_i - \lambda_1 \sum_{k=0}^{p-1} \beta_{ik} A_k = \lambda_1 \beta_i + \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} y_0^{(j-1)} + \lambda_1 \sum_{k=1}^{\nu} \gamma_{ik} B_k\,, i = \overline{0, p-1}, \tag{2.30}$$

мұндағы

$$\beta_{ik} = \int\limits_{a}^{b} \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha^{(i)}\,(x_0,t)\, h_k^{(\alpha)}(t)dt,$$

$$\beta_i = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha^{(i)}(x_0, t)\, h^{(\alpha)}(t)dt,$$

$$\gamma_{ik} = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha^{(i)}(x_0, t)\, v_k^{(\alpha)}(t)dt,$$

$$\xi_{ij} = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha^{(i)}(x_0, t)\, g_j^{(\alpha)}(t)dt.$$

$\lambda = \lambda_1$ меншікті мәні үшін (2.8) интегралдық теңдеудің шешімі бар болуының шарты бойынша $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ тұрақтылары келесі жүйені де қанағаттандырулары керек:

$$a_{0i}A_0 + a_{1i}A_1 + \ldots + a_{p-1,i}A_{p-1} = b_i \qquad i = \overline{1, \nu}, \tag{2.31}$$

мұндағы

$$a_{ki} = \int_a^b \omega_k(x)\, \psi_i(x)dx$$

$$b_i = -\int_a^b \left(\omega(x) + \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} \widetilde{K}_j(x, x_0) \right) \psi_i(x)dx.$$

Осылайша, $\lambda = \lambda_1$ меншікті мәні үшін (2.1) сызықты интегралды дифференциалдық теңдеудің шешімі бар болуы үшін (2.30) , (2.31) жүйелері бірге үйлесімді болуы қажетті және жеткілікті.

Жүйенің үйлесімділігінің бір жеткілікті белгісін көрсетейік. (2.30) теңдеулерінің оң жағы кез келген B_k, $k = \overline{1, \nu}$ параметрлерінен құралған. Егер осы жүйенің анықтауышы $d(\lambda_1) \neq 0$ болса, онда A_k шамалары $B_1, B_2, \ldots, B_\nu$ параметрлері арқылы өрнектеледі. Осылайша, анықталған A_k мәндерін (2.31) теңдеулер жүйесіне қойсақ, келесі түрдегі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\sum_{k=1}^{\nu} C_{pk} B_k = r_k, \qquad k = \overline{1,\nu} \tag{2.32}$$

мұндағы C_{pk} және r_k – белгілі сандар.

Егер (2.32) жүйенің анықтауышы $\delta(\lambda_1) \neq 0$ болса, онда B_k шамалары бірмәнді анықталады. Ал бұдан A_k шамаларының да бірмәнді анықталатындығы шығады. Олай болса, келесі *теорема 11* орындалады:

Теорема 11. λ_1 мәні (2.24) интегралдық теңдеудің меншікті мәні болсын. Егер $d(\lambda_1)$ және $\delta(\lambda_1)$ анықтауыштары нөлден өзгеше болса, онда (2.1) , (2.2) Коши есебінің (2.26) формуламен анықталатын жалғыз шешімі бар болады.

Мысал3.

$$y' - y = x + \lambda \int_0^1 (ty + xty''')dt \tag{a}$$

$$y(0) = 1$$

Шешуі: $n = 1,\ m = 3,\ p = 2.$

(a) теңдеуін x айнымалысы бойынша 2 рет дифференциалдап, келесі теңдеулерге келеміз:

$$y'' - y' = 1 + \lambda \int_0^1 ty'''\,dt$$

$$y''' - y'' = 0. \tag{b}$$

Алынған (b) теңдеуден $[0, x]$ аралығында x айнымалысы бойынша 2 рет интегралдаймыз:

$$y'' - y' = C_1$$

$$y' - y = C_1 x + C_2, \tag{c}$$

мұндағы $C_1 = 1 + A_1,\ C_2 = A_0,$ ал

$$A_k = \lambda \int_0^1 \sum_{\alpha=0}^{3} H_\alpha^{(k)}(0,t)\, y^{(\alpha)}(t)dt, \qquad k = 0,1. \qquad (d)$$

C_1 және C_2 тұрақтыларын табу үшін (d) шартынан анықтаймыз:

$$\begin{cases} C_1 = 1 + \lambda \int_0^1 ty'''dt \\ C_2 = \lambda \int_0^1 tydt \end{cases} \qquad (e)$$

(c) теңдеудің шешімі $y = Ce^x - C_1(x+1) - C_2$ түрінде анықталады. Бұл алынған шешімге $y(0) = 1$ бастапқы шартын қолданып,

$$y = (1 + C_1 + C_2)e^x - C_1(x+1) - C_2 \qquad (f)$$

шешімді аламыз. (e) жүйесінен (f) көмегімен C_1 және C_2 тұрақтыларын анықтаймыз:

$$\begin{cases} (1-\lambda)C_1 - \lambda\, C_2 = 1 + \lambda \\ -\dfrac{\lambda}{6}C_1 + \left(1 - \dfrac{\lambda}{2}\right)C_2 = \lambda \end{cases} \qquad (j)$$

(j) жүйенің анықтауышы

$$\Delta(\lambda) = \frac{1}{6}(2\lambda^2 - 9\lambda + 6) \neq 0.$$

Крамер формуласы бойынша

$$C_1 = \frac{3\lambda^2 + 3\lambda + 6}{2\lambda^2 - 9\lambda + 6}$$

$$C_2 = \frac{7\lambda - 5\lambda^2}{2\lambda^2 - 9\lambda + 6}$$

тұрақтыларын анықтаймыз. Осы табылған тұрақтыларды (f) теңдеуіне қойсақ, берілген (a) есебінің шешімін аламыз:

$$y(x) = \frac{(7 + 10\lambda - 2\lambda^2)e^x - (3\lambda^2 + 3\lambda + 6)x + 2\lambda^2 - 10\lambda - 6}{2\lambda^2 - 9\lambda + 6} .$$

$2\lambda^2 - 9\lambda + 6 = 0$ теңдеуінің түбірлері (a) теңдеуінің меншікті мәндері болады,яғни

$$\lambda_1 = \frac{9 + \sqrt{33}}{4}, \qquad \lambda_2 = \frac{9 - \sqrt{33}}{4}.$$

λ - ның осы мәндерінде (j) жүйесінің шешімі болмайды. Сондықтан да (a) теңдеуі үшін қойылған Коши есебінің шешімі жоқ.

§2 Сызықты интегралды дифференциалдық теңдеуге қойылған шекаралық есеп

(2.1) түріндегі сызықты интегралды дифференциалдық теңдеуге қойылған шекаралық есепті қарастырайық:

$$L[y(x)] = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha(x,t)\, y^{(\alpha)}(t)dt, \qquad m > n \qquad (2.33)$$

$$\begin{cases} h_l y \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{lj} y^{(j)}(a) = a_l, \qquad l = \overline{1,p} \\ h_{p+l} y \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{lj}\, y^{(j)}(b) = b_l, \qquad l = \overline{1,q} \end{cases} \qquad (2.34)$$

$$p + q = n,$$

мұндағы

$$L[y(x)] \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y^{(k)}(x)$$

сызықты дифференциалдық оператор.

§1 –дегі I-III шарттар орындалсын.

§1- дегі тәсілдің көмегімен келесі түрдегі көмекші теңдеуге келеміз:

$$L[y(x)] = f(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k \frac{(x-a)^k}{k!} + \lambda \int_a^x \frac{(x-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} Q[y(\eta)]d\eta, \qquad (2.35)$$

мұндағы $A_k -$ кез келген тұрақтылар, ал Q операторы интегралды дифференциалдық оператор

$$\mathrm{Q}[y(x)] = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha^{(p)}(x,t)\, y^{(\alpha)}(t)dt.$$

Егер A_k тұрақтылары

$$A_k = \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha^{(k)}(a,t)\, y^{(\alpha)}(t)dt, \qquad k = \overline{0, p-1} \qquad (2.36)$$

шартына бағынса, онда (2.33) және (2.35) теңдеулері пара-пар болады. Сондықтан да (2.35) теңдеуді (2.34) шекаралық шартпен қарастырамыз.

I тараудың §1-дегі тәсілі бойынша (2.35) теңдеуді келесі түрге келтіреміз:

$$y(x) = \varphi(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k \varphi_k(x) + \lambda \int_a^x \overline{K}_n(x,\eta)\, Q[y(\eta)]d\eta, \qquad (2.37)$$

мұндағы

$$\begin{cases} \varphi(x) = \int_a^x K_n(x,\eta) f(\eta)d\eta + \sum_{i=1}^{n} C_i\, \Phi_i(x) \\ \varphi_k(x) = \int_a^x K_n(x,\eta) \frac{(\eta - x_0)^k}{k!} d\eta \\ \overline{K}_n(x,\eta) = \int_\eta^x K_n(x,t)\, \frac{(t-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} dt \end{cases}$$

ал $K_n(x,\eta)$ – белгілі Коши функциясы, $\Phi_i(x)$, $i = \overline{1,n} -$ шекаралық функциялар.

$\overline{K}_n(x,\eta)$ функциясы

$$L[y(x)] = \frac{(x-\eta)^{p-1}}{(p-1)!}$$

түріндегі дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады және

$$\overline{K}_n^{(j)}(\eta,\eta) = \begin{cases} 0, & j = \overline{0, m-2} \\ 1, & j = m-1 \end{cases}.$$

(2.37) сызықты интегралды дифференциалдық теңдеуге Q операторымен әсер етіп,

$$u(x) = \omega(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k \omega_k(x) + \lambda \int_a^b M(x,t)\, u(t)dt, \qquad (2.38)$$

интегралдық теңдеуге келтіреміз, мұндағы,

$$M(x,t) = \int_t^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha^{(p)}\ (x,\eta)\, \overline{K}_n^{(\alpha)}(\eta,t)d\eta\ ,$$

$$u(x) = \mathrm{Q}[y(x)],\ \ \omega(x) = \mathrm{Q}[\varphi(x)],\ \ \omega_k(x) = \mathrm{Q}[\varphi_k(x)].$$

λ параметрі M өзегінің меншікті мәні болмасын.

$$Av(x) \equiv v(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\, v(t)dt,$$

операторын енгізейік, мұндағы $R(x,t,\lambda) - M(x,t)$ өзегінің резольвентасы. Онда (2.38) интегралдық теңдеудің шешімі

$$u(x) = A\omega(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k\, A\omega_k(x)$$

түрінде анықталады. Осы шешімге сәйкес (2.35) сызықты интегралды дифференциалдық теңдеудің шешімі

$$y(x) = \eta(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k \eta_k(x), \qquad (2.39)$$

түрінде анықталады, мұндағы

$$\eta(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^x \overline{K}_n(x,\eta)\, A\omega(\eta) d\eta,$$

$$\eta_k(x) = \varphi_k(x) + \lambda \int_a^x \overline{K}_n(x,\eta)\, A\omega_k(\eta) d\eta. \qquad (2.40)$$

(2.39) функция (2.33) теңдеудің шешімі болуы үшін A_k тұрақтылары (2.36) шартына бағыну керек. (2.36) шартқа $y(x)$ мәнін қойсақ, онда A_k тұрақтыларын анықтайтын жүйе аламыз:

$$A_k - \lambda \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{ki} A_i = \lambda a_k(\lambda), \quad k = \overline{0, p-1}, \qquad (2.41)$$

мұндағы

$$a_k(\lambda) = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha^{(k)}(a,t)\, \eta^{(\alpha)}(t) dt$$

$$\alpha_{ki}(\lambda) = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha^{(k)}(a\,, t)\, \eta_i^{(\alpha)}(t) dt$$

$\Delta(\lambda)$ $-$(2.41) жүйенің анықтауышы болсын. Егер $\Delta(\lambda) \neq 0$ болса, онда A_k шамалары бірмәнді анықталады.

C_i , $i = \overline{1, n}$ тұрақтыларын анықтау үшін (2.39) жалпы шешімінен тұрақтыларды жинақтап,

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \overline{\Phi}_i(x) + \tau(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k\, \eta_k(x) \qquad (2.42)$$

теңдігін аламыз, мұндағы

$$\overline{\Phi}_i(x) = \Phi_i(x) + \lambda \int_a^x \overline{H}\,(x,\eta)\,\overline{\gamma}_i(\eta)d\eta\,, \qquad (2.43)$$

$$\overline{\gamma}_i(x) = \gamma_i(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\;\gamma_i(t)dt,$$

$$\gamma_i(x) = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha^{(p)}\,(x,t)\;\Phi_i^{(\alpha)}(t)dt\,,$$

және

$$\tau(x) = g_1(x) + \lambda \int_a^x \overline{H}\,(x,\eta)\;\overline{q}(\eta)d\eta\,, \qquad (2.44)$$

$$g_1(x) = \int_a^x K_n(x,\eta)\;f(\eta)d\eta\,,$$

$$\overline{q}(x) = q(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\;q(t)dt\,,$$

$$q(x) = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} H_\alpha^{(p)}\,(x,t)\;g_1^{(\alpha)}(t)dt.$$

(2.42) формуладағы $y(x)$ −ты (2.34) шекаралық шарттарға бағындырайық. Сонда $C_l = a_l,\quad l = \overline{1,p}$ мәндерін аламыз. Ал $C_{p+l}\,,\quad l = \overline{1,q}$ белгісіздері үшін келесі теңдеулер жүйесі алынады:

$$\sum_{i=p+1}^{n} C_i\left(\delta_{p+r,i} + \sum_{j=0}^{n-1}\beta_{p+r,j}\,\lambda\int_a^b \overline{K}_n^{(j)}(b,\eta)\;\overline{\gamma}_i(\eta)d\eta\right) = b_r -$$

$$-\sum_{i=1}^{p} a_i \sum_{j=0}^{n-1}\beta_{p+r,j}\lambda\int_a^b \overline{K}_n^{(j)}(b,\eta)\;\overline{\gamma}_i\,(\eta)d\eta -$$

$$-\sum_{j=0}^{n-1}\beta_{p+r,j}\int_a^b\left(K_n^{(j)}(b,\eta)\,f(\eta)+\lambda\,\overline{K}_n^{(j)}(b,\eta)\bar{q}(\eta)\right)d\eta-$$

$$-\sum_{k=0}^{p-1}A_k\sum_{j=0}^{n-1}\beta_{p+r,j}\int_a^b\left(K_n^{(j)}(b,\eta)\ \frac{(\eta-a)^k}{k!}+\lambda\,\overline{K}_n^{(j)}(b,\eta)\ A\omega_k(\eta)\right)d\eta. \qquad (2.45)$$

мұндағы $r=\overline{1,q}$. μ − (2.45) жүйенің анықтауышы болсын.

Теорема 12. Егер λ мәні $\Delta(\lambda)=0$ теңдеуінің түбірі болмаса және μ ≠ 0 болса, онда (2.33), (2.34) шекаралық есептің шешімі жалғыз және (2.42) формуласымен анықталады, мұндағы A_k тұрақтылары (2.41) жүйеден бірмәнді табылады және $C_i=a_i,\ i=\overline{1,p}$, $C_i,\ i=\overline{p+1,n}-$ тұрақтылары (2.45) жүйенің шешімі, ал $\eta_k(x),\ \overline{\Phi}_i(x),\tau(x)$ функциялары (2.40), (2.43) , (2.44) формулаларымен анықталады.

Мысал 4 .

$$y''+y'=\int_0^1\beta\,y'''(t)dt\,,\qquad \beta\neq\frac{1}{1-e} \qquad (a)$$

$$y(0)=1\ ,\ \ y'(1)=1$$

Шешуі: $n=2$, $m=3,$ $p=1$ болғандықтан, (a) теңдеуін x айнымалысы бойынша 1 рет дифференциалдап, келесі теңдеуге келеміз:

$$y'''+y''=0 \qquad (b)$$

Алынған (b) теңдеуінен $[0,x]$ аралығында интегралдап,

$$y''+y'=A_0\,,\qquad A_0\equiv const \qquad (c)$$

теңдеуіне келеміз.

Егер

$$A_0=\int_0^1\beta\,y'''(t)dt \qquad (d)$$

шартына бағынса, онда (a) және (c) теңдеулері пара – пар болады. Сондықтан да (c) теңдеуін берілген шекаралық шарттарымен қарастырамыз.

(c) теңдеуінің шешімі $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + A_0\, x$ түрінде анықталады. Бұл шешімге берілген шекаралық шартты қолданып,

$$y(x) = 1 - (A_0 - 1)e \ + \ (A_0 - 1)e^{1-x} + \ A_0 x \qquad (e)$$

теңдігін аламыз, мұндағы A_0 тұрақтысын (d) шартынан табамыз:

$$A_0 = \frac{\beta(e-1)}{1 - \beta(1-e)}.$$

Табылған A_0 тұрақтысын (e) теңдігіне қойып, берілген интегралды дифференциалдық теңдеудің шешімін аламыз:

$$y(x) = \frac{\beta(1-e) - 1 - e + e^{1-x} + x}{\beta(1-e) - 1}$$